

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 02/07/13

- (1) Sia $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tale che $f_0 \geq 0$ q.o. e $\int_{\mathbb{R}^n} f_0 = a < 1$. Si definisce per ricorrenza la successione di funzioni $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$f_1(x) = f_0 * f_0(x), f_{k+1}(x) = f_0 * f_k(x) \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Stabilire se la successione di funzioni $\{f_k\}$ converge in $L^1(\mathbb{R}^n)$, e se sì a quale limite.

Sol.: Per induzione si verifica che $f_k \geq 0$ per ogni k e che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k| = a^{k+1} \rightarrow 0$$

per $k \rightarrow \infty$. Quindi $f_k \rightarrow 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

- (2) Sia $\{z_k\}$ una successione di punti in \mathbb{R}^n tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$. Sia g una funzione integrabile nonnegativa su \mathbb{R}^n , calcolare se esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x - z_k)}{1 + |x|} d\mu(x) .$$

Sol.: Si sostituisca $y = x - z_k$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x - z_k)}{1 + |x|} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)}{1 + |y + z_k|} d\mu(y) .$$

Posto

$$f_k(y) = \frac{g(y)}{1 + |y + z_k|}$$

si ha $|f_k| \leq g$ e $f_k(y) \rightarrow 0$ per quasi ogni y . Per il teorema della convergenza dominata si ricava

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x - z_k)}{1 + |x|} d\mu(x) = 0 .$$

- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X , tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sinh(|f_n|) d\mu = 0 .$$

a) Provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0$ per ogni $p, 1 \leq p < \infty$.

b) Dare un esempio di una successione $\{f_n\}$ (verificante le ipotesi fatte) per cui $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty \neq 0$.

Sol.:

$$\sinh t = \sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \geq \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \forall k \geq 0.$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0$ per ogni $p = 1, 3, 5, \dots$, e per le disuguaglianze interpolatorie, segue a).

b) Si prenda

$$f_n = \text{setts}(\sqrt{n})\chi_{[n, n+1/n]}$$

si ricava

$$\sinh(|f_n|) = \sqrt{n}\chi_{[n, n+1/n]}$$

e risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sinh(|f_n|) d\mu = 0,$$

ma $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = \infty$